XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa
Instituto Tecnológico de Ciudad Madero
Seminario de Doctorado- Modalidad Avanzados

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE CONJUNTO GENERADOR Y ESPACIO GENERADO EN ÁLGEBRA LINEAL DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA TEORÍA APOE

Presentado por M. en C. Darly Alina Kú Euán
darlyku@cinvestav.mx
Directoras del proyecto: Dra. Asuman Oktaç y Dra. María Trigueros
oktac@cinvestav.mx, trigue@itam.mx

Resumen

El estudio acerca de la comprensión de los estudiantes acerca de las nociones conjunto generador y espacio generado en álgebra lineal ha recibido poca atención desde el punto de vista de la construcción de estas nociones. En este documento se presenta un estudio preliminar que es parte de un proyecto doctoral destinado a estudiar cómo aprenden estas nociones los estudiantes. En este estudio se utiliza la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) para proponer una descomposición genética de cómo estos conceptos pueden ser construidos. Se diseña una entrevista basada en la descomposición genética, que se aplica a tres estudiantes que cursaban álgebra lineal. Los resultados de la entrevista muestran que los estudiantes necesitan un proceso de construcción del espacio vectorial y una concepción objeto de la noción variable para poder construir la concepción proceso de las nociones conjunto generador y espacio generado.

1. Sobre el problema de investigación

En la actualidad se han realizado varias investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal. En cuanto su aprendizaje se puede decir que gran parte de las investigaciones se enfocan en el estudio de los conceptos de espacios vectoriales, sistemas de ecuaciones lineales y transformaciones lineales (Vargas, 2007; Manzanero, 2007; Roa, 2008). Sin embargo hay otras nociones que casi no sean estudiado de manera específica, como la base de un espacio vectorial, conjuntos generadores y espacio generado, y que son de importancia para el estudio de los conceptos antes mencionados. Sin embargo existen diversos trabajos de investigación que abordan de manera implícita los conceptos de conjunto generador y conjunto generado (Ball et al. (1998); Dorier et al. (2000); Rogalski (2000) y Kú et al. (2008)), estos se han centrado en diversos objetos de estudio como: las dificultades cognitivas que surgen en cuanto a su aprendizaje, en el análisis y desarrollo de tareas, y en sugerencias didácticas. Nuestra revisión de la literatura reveló que el aprendizaje de este tema ha sido muy poco investigado. En particular, encontramos al trabajo de Nardi (1997) basado en su proyecto doctoral, el cual es un estudio de las dificultades conceptuales y de razonamiento del matemático principiante en su encuentro con la abstracción matemática; como parte de este proyecto se abordan los conceptos de espacio generado y conjunto generador en álgebra lineal. Los resultados obtenidos, mostraron que los estudiantes presentaron dificultades en la comprensión de los conceptos de conjunto generador y espacio generado, ya que ellos consideran a un conjunto generador como una base, es decir los estudiantes mantienen una imagen conceptual de un conjunto generador que al mismo tiempo puede o no ser linealmente independiente, pero que necesariamente forma una base para el espacio vectorial presentado (Nardi, 1997).Esto nos muestra la forma en la que los estudiantes van asociando las nociones de un concepto a otro concepto, en este caso el conjunto generador con una base. Podemos decir que para el aprendizaje del concepto de Base, el estudiante deberá tener una comprensión fuerte del concepto de conjunto generador.

Con base a ello, nos hemos interesado en indagar la dificultad relacionada con la pertenecía de los vectores de un conjunto generador al espacio vectorial generado por ellos. Por tanto nuestro objetivo de investigación es:

Estudiar a profundidad la comprensión de los conceptos conjunto generador y espacio generado con el propósito de presentar un conjunto de construcciones mentales que el estudiante puede desarrollar para la comprensión de estos conceptos. Mediante ella pretendemos responder a la pregunta: ¿Cómo los estudiantes llegan a comprender el concepto de conjunto generador y espacio generado?

En particular las siguientes preguntas de investigación darán la pauta para la realización de este proyecto:

- ¿Cómo podemos caracterizar las concepciones Acción, Proceso y Objeto (determinadas por la teoría APOE) de la construcción del concepto Conjunto Generador-Espacio Generado? ¿Qué relaciones y qué elementos matemáticos se manifiestan en un Esquema para el mismo concepto? ¿Cómo se relaciona este concepto con otros conceptos?
- ¿Cómo podemos caracterizar el paso de una concepción a otra?
- ¿Cuáles son las dificultades que pueden bloquear el camino de aprendizaje de este concepto y cuáles son las posibles causas de éstas? Cabe aclarar que la identificación de estas dificultades y su asociación con la manera con que los estudiantes construyen los conceptos de álgebra lineal es de gran importancia para el desarrollo e implementación de nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje en álgebra lineal.

Finalmente, a la luz de los resultados obtenidos en la investigación, nos interesa ofrecer sugerencias didácticas que puedan servir a mejorar el aprendizaje de este concepto.

2. Marco teórico

Este proyecto de investigación tiene como sustento teórico a la teoría APOE, la cual fue iniciada por Dubinsky, y desarrollada más tarde por el Grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Commnity). Esta teoría se apoya en la teoría piagetiana constructivista, acerca de la abstracción reflexiva como la clave de la construcción de los conceptos lógico-matemático. Estas ideas fueron reformuladas sobre la educación para poder ser utilizadas en el estudio del pensamiento matemático avanzado.

Dubinsky aclara qué es lo que se entiende por conocimiento matemático y su desarrollo en un individuo según su enfoque teórico:

"*El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas con el fin de manejar las situaciones" (Dubinsky, 1996)*

En esta afirmación la componente más importante es la que se refiere a las construcciones mentales (acción, proceso, objeto y esquema), la cual hace específica a las matemáticas. A continuación describimos las construcciones mentales para el aprendizaje de un concepto matemático, previstas por la teoría APOE:

Acción. *Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos* *a seguir. Un individuo que tiene una profunda comprensión sobre un cambio dado puede ejecutar una acción cuando sea necesario, pero no se limita a operar en el nivel de acciones.*

Proceso. *Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre, describir, o incluso invertir los pasos de la transformación sin realizar dichos pasos (Asiala et al., 1996).*

Objeto*. Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto (Asiala et al., 1996).*

Esquema. *Se puede decir que un esquema es una colección coherente de acciones, procesos y objetos y otros esquemas que se tienen para un concepto en particular (Asiala, et al., 1996). Una función importante y una característica que define la coherencia está en su uso para decidir lo que es dentro del alcance del esquema y lo que no es (Glosario RUMEC).*

Un esquema contiene diferentes acciones, procesos y objetos, y diferentes conexiones entre ellos. Es decir, el individuo es capaz de ver toda la estructura relacionada con el concepto. En la teoría APOE el mecanismo para pasar de una concepción a otra es la abstracción reflexiva, que se refiere a la reflexión sobre las acciones que se hacen sobre un objeto de conocimiento. Trigueros (2005) menciona que este mecanismo se activa a través de las acciones físicas o mentales que el individuo hace sobre el objeto de conocimiento.

Cuando se utiliza la teoría APOE es necesario desarrollar una descripción idealizada y detallada de las acciones, procesos, objetos, esquemas y las relaciones que se producen en la construcción de una noción matematica. Este modelo es conocido como descomposición genética de la noción matematica de estudio. La viabilidad de una descomposición genética puede ser probada empíricamente, con el trabajo que realizan los estudiantes. Los resultados que se obtienen del trabajo de los estudiantes se utilizan para refinar la descomposición genética, con el fin de presentar una mejor descripción de la forma en cómo los estudiantes aprenden los conceptos (Dubinsky, 1991).

De acuerdo a lo que expuesto, podemos decir que la teoría APOE proporciona elementos teóricos y metodológicos interesantes y válidos para abordar nuestros objetivos de investigación. Nos interesa lo concerniente al estudio de la naturaleza del conocimiento matemático y su desarrollo en un individuo. En la teoría APOE lo que se busca es la reflexión por parte de los individuos al momento de aprender y comprender los conceptos matemáticos, para hacer una modelación de su aprendizaje.

3. Metodología de la Investigación

La metodología que usamos en esta investigación está fundamentada en el ciclo de investigación presentado por la teoría APOE (Asiala et al., 1996). Diseñamos una descomposición genética preliminar. Esta a su vez fundamento el diseño de una entrevista, para indagar las construcciones mentales de los estudiantes respecto al concepto de estudio. Posteriormente se realizó un análisis a priori de todas las preguntas que componen este instrumento (entrevista) en términos de la descomposición genética preliminar, explicitando el propósito de cada una de ellas, y justificando su elección. Aplicamos este instrumento a un pequeño grupo de 3 estudiantes como un estudio piloto, para identificar cualquier dificultad que puede surgir en la interpretación de las situaciones matemáticas propuestas y para modificar el instrumento cuando sea necesario.

3.1 Descomposición genética

En esta primera etapa de la investigación se diseño una descomposición genética preliminar de los conceptos conjunto generador y espacio generado y se pretende que con estas construcciones el estudiante pueda diferenciar el significado entre estos conceptos. A continuación presentare parte de las construcciones mentales descritas en la descomposición genética preliminar:

3.1.1 Construcciones Mentales

Dado un espacio vectorial V, un conjunto específico de vectores S de V y los escalares de un cuerpo K, los estudiantes realizarán acciones con los vectores de S y los escalares de K. Estas acciones consisten en realizar multiplicaciones por un escalar y la suma entre ellos para formar un nuevo vector del espacio vectorial V. Estas acciones se coordinan en el proceso de construir un nuevo vector que es un elemento del espacio vectorial, es decir, en el proceso de construir combinaciones lineales. Este proceso también implicará que el estudiante pueda verificar si un determinado vector puede ser escrito como combinación lineal de un conjunto dado de vectores. Por tanto diremos que el estudiante posee una concepción proceso del concepto de combinaciones lineales.

Una vez que el estudiante posea una concepción proceso de las combinaciones lineales, aplicará este proceso en un determinado conjunto de vectores S, para verificar si existen escalares en K que pueden ser utilizados para expresar los elementos de un nuevo conjunto de vectores T en el espacio vectorial V como combinación lineal de S. Entonces el verificar si existe una combinación lineal que exprese al vector dado llevará al estudiante a expresar a las combinaciones lineales como un sistema de ecuaciones que le permita encontrar el valor de los escalares de la combinación lineal formada. Este proceso está coordinado con el proceso de encontrar la solución del sistema de ecuaciones considerando el concepto de variable. Como resultado de esa coordinación se tiene el proceso de encontrar un conjunto de escalares. El proceso de formar combinaciones lineales de S con los escalares de K, permite que el estudiante pueda comprobar que S genera a T. Por tanto este proceso se ha generalizado implicando incluir diferentes características de S y T. Este proceso se encapsula en un objeto que se puede llamar conjunto generador.

La concepción objeto de conjunto generador implica que los estudiantes sean capaces de explicar que un espacio vectorial dado puede ser generado por diferentes conjuntos generadores es decir que no está generado de manera única, y que los conjuntos generadores no tienen por qué no tener elementos en común o por qué tener el mismo número de elementos. Así mismo se podrá dar cuenta que el número de elementos de los conjuntos no establece el hecho de ser o no un conjunto generador.

El estudiante podrá invertir el proceso anterior para construir un conjunto generador. Así mismo podrá aplicar las acciones necesarias para verificar si un conjunto T es un espacio vectorial o bien un subespacio de un espacio vectorial de V. Este proceso puede ser generalizado para determinar si V puede estar formado por todas las combinaciones lineales posibles de un conjunto de vectores T. Este proceso de generalización se encapsula en un nuevo objeto que se puede llamar conjunto generado o espacio generado, por el conjunto de vectores dado. Estas construcciones deben permitir que el estudiante sea capaz de distinguir los conceptos espacio generado y conjunto generador. Esto implicaría no confundir estos conceptos y otros como base de un espacio vectorial.

Cabe mencionar que otro camino para construir estos conceptos, es que se inicie con la construcción del conjunto generado-espacio generado y posteriormente se construya el concepto de conjunto generador. Datos experimentales serán necesarios para comparar los diferentes procesos de construcción.

A continuación mostraré una de las preguntas que se utilizaron para la entrevista, con parte de su análisis a priori y a posteriori:

Pregunta 2. Sea el conjunto $S = \{(1,2,3),(1,-1,2),(2,1,1)\}$. S genera al espacio vectorial R^3.

Análisis a priori: Este problema tiene el propósito de determinar las construcciones de los estudiantes a través de las acciones o procesos que utilizan para determinar si un conjunto S genera al espacio vectorial. Para poder resolver estos problemas los estudiantes necesitan tener las siguientes construcciones: los procesos de escribir la combinación lineal apropiada y el correspondiente sistema de ecuaciones, de encontrar el conjunto solución, y de comparar con el espacio vectorial para decidir si S genera V o no. Cabe mencionar que en este caso el estudiante puede utilizar las nociones de dimensión e independencia lineal para dar su respuesta.

Análisis a posteriori: En esta pregunta pudimos observar que uno de los estudiantes al que llamaremos A3, checa las condiciones de *generar* un espacio utilizando un vector específico que él escoge, pero no puede interpretar la solución general.

A3: Eso estaba viendo…mmm…no encuentro la manera (escribe)

(x, y,z)= x (1,0,0)+ y(0,1,0) + z(0,0,1)…este genera

E: En este ejemplo que diste acá (se refiere al extracto de arriba) ¿cómo sabías que este conjunto genera a este espacio?

A3: mmm… porque es la base canónica

E: y otro conjunto que no sea la canónica, ¿cómo lo comprobarías?

A3: (escribe)

$$(x, y, z) = x(1,2,3) + y(1,-1,2) + z(2,1,1)$$
$$(1,2,1) = (x + y + 2z, 2x - y + z, 3x + 2y + z) \quad \text{… no sé no me acuerdo}$$
$$= (5,1,8)$$

Las respuestas de A3 mostraron que si un estudiante no articula la noción de variable con el proceso de conjunto solución de un sistema de ecuaciones, no podrá transitar a una concepción proceso de las nociones de estudio. Por tanto A3 mostro una concepción acción de conjunto generador, ya que solo se limito en toda la entrevista a trabajar con espacios vectoriales concretos y vectores específicos.

4. Lo que sigue de la investigación

Los resultados obtenidos en la primera etapa de la investigación nos indicaron que existen dificultades en diferenciar las nociones de base de un espacio vectorial y un conjunto generador. Asimismo existen dificultades en la integración de otras nociones como la dimensión de un espacio vectorial al uso de los conceptos en cuestión. Consideramos que no sólo es importante que los estudiantes puedan diferenciar estos conceptos, sino que también tomen decisiones apropiadas frente a situaciones matemáticas que requieren el uso de estos conceptos. Los resultados encontrados nos permiten también hacer hincapié en que el hecho de memorizar las definiciones y teoremas no garantiza la comprensión de los mismos. Es por ello que nuestra descomposición genética hace énfasis en diferenciar las nociones: conjunto generador y espacio generado. Podemos afirmar que los resultados en la primera etapa de la investigación nos mostraron que las construcciones que tenían los estudiantes de las nociones conjunto generador y espacio generado, se apegan las descritas en la descomposición genética. Por otro lado creemos que nuestro instrumento de investigación que se aplicó a tres estudiantes como una entrevista piloto podría mejorarse para poder recolectar información más profunda sobre las construcciones mentales de los entrevistados respecto a los conceptos conjunto generador y espacio generado. Para ello pretendemos agregar algunas preguntas a la entrevista cuya finalidad será indagar sobre las construcciones que corresponden a diferentes componentes de nuestra descomposición genética. Aplicaremos este instrumento mejorado a un grupo de por lo menos ocho estudiantes, para profundizar sobre la vía de construcción de los conceptos en cuestión y las dificultades asociadas.

5. Bibliografía

1. Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Ed.s) *Research in collegiate mathematics education.* Vol. 2. Providence, RI: American Mathematical Society. p. 1-32.
2. Ball, G., Stephenson, B., Smith, G., Wood, L., Coupland, M. and Crawford, K. (1998). Creating a diversity of mathematical experiences for tertiary students. ,*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **29**(6), 827-841
3. Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, R. and Rogalski, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. A Variety of Studies From 1987 Until 1995. In J.-L. Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra. Dordrecht : Kluwer, pp. 85-124.
4. Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática.* Vol. 8
5. Dubinsky, E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in Tall, D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers. pp. 95 – 123.
6. Kú, D., Trigueros, M. and Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Educación Matemática*. Aceptado para ser publicado.
7. Nardi, E. (1997). El encuentro del matemático principiante con la abstracción matemática: Una imagen conceptual de los conjuntos generadores en el análisis vectorial. *Educación Matemática.* **9**(1), 47-60.
8. Manzanero, L. (2007). Sistemas de ecuaciones: una perspectiva desde la teoría APOE. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN.
9. Roa, D. (2008) *Construcciones y Mecanismos mentales asociados al concepto Transformación Lineal.* Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN.
10. Rogalski, M. (2000). The Teaching Experimented in Lille. In J.-L. Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra. Dordrecht : Kluwer, pp. 133-149.
11. Trigueros, M. y Oktaç, A. y (2005). La Théorie APOS et l’enseignement de l’algèbre linéaire. *Annales de didactique et sciences cognitives*, vol. 10, 157-176.
12. Vargas, X. N. (2007). *El estudio de los espacios vectoriales desde el punto de vista de la teoría APOE*. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN.